



# ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

An Investigation Of Secondary School Students 'Inductive Reasoning Abilities

Dr. Öğrt. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Fn ve Matematik Alanalı Eğitimi Bölümü, Sivas/Türkiye

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7037-6140>

Gülten EROL

Milli Eğitim Müdürlüğü-Sivas/Türkiye

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5751-6460>

**Cite As:** Demircioğlu, H. & Erol, G. (2021). “Ortaöğretim Öğrencilerinin Tümevarımsal Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi”, International Social Mentality and Researcher Thinkers Journal, (Issn:2630-631X) 7(43): 741-754.

## ÖZET

Tümevarımsal akıl yürütme özel durumlardaki ilişkilerden yararlanarak genel durum hakkında çıkarımda bulunma, varsayımlarını doğrulamayı içeren bir süreçtir. Bu çalışmanın amacı ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal akıl yürütme sürecini incelemektir. Çalışmanın katılımcılarını 9, 10, 11 ve 12. sınıfa devam eden 188 ortaöğretim öğrencisi oluşturmaktadır. Veriler gönüllü öğrencilerden yazılı olarak toplanmıştır. Verilerin analizinde içerik analizi yapılmıştır. Toplanan veriler tümevarımsal akıl yürütme aşamalarına (gözlemeleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellenmenin testi) göre incelenmiştir. Bu aşamalara göre sınıf düzeyi temele alınarak frekans ve yüzde tabloları oluşturulmuştur. Bu sayede hem aşamalar arasında hem de sınıflar arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Elde edilen bulgular yordamanın testi ve genellenmenin testi aşamalarını öğrencilerin daha az sergilediğini göstermiştir. Ayrıca şekil verilmeyen sorularda başarının daha düşük olduğunu göstermiştir.

**Anahtar kelimeler:** Akıl yürütme, Tümevarımsal Akıl yürütme, ortaöğretim öğrencileri

## ABSTRACT

Inductive reasoning is a process that involves making inferences about the general situation and verifying its assumptions by using the relations in special situations. The aim of this study is to examine the inductive reasoning process of secondary school students. Participants of the study consist of 188 secondary school students attending the 9th, 10th, 11th and 12th grades. The data were collected in writing from volunteer students. Content analysis was made in the analysis of the data. The collected data were analyzed according to the stages of inductive reasoning (observation, organization of observations, prediction, test of prediction, generalization, test of generalization). According to these stages, frequency and percentage tables were created based on the class level. In this way, comparisons were made both between stages and between classes. The findings obtained showed that students exhibited less of the test of the prediction and the test of generalization. It also showed that success was lower in unformed questions.

**Key Words:** Reasoning, Inductive Reasoning, Secondary Students

## 1. GİRİŞ

Matematik öğretimi, öğretim programında yer alan kazanımların yanı sıra öğrencilere ispat, genelleme yapma, matematiksel düşünme, problem çözme, akıl yürütme gibi beceriler kazandırmayı da hedeflenmektedir. Günlük hayat durumlarında akıl yürütebilmek için gözlem yapmaya, gözlemler sonucunda durumlar arasında ilişkiler kurarak çıkarımlarda bulunmaya hatta bazen de genellemelere ulaşmaya yani tümevarmaya ihtiyaç duyulmaktadır. Bu zihinsel bir süreçtir. Gerçekten “otobüs genelde geç geliyor” veya “otobüs her zamana geç kalır” cümlelerinde durumları gözlemeleme, gözlemlerden yola çıkarak varsayım ortaya atma, varsayımı doğrulama, genelleme yapma gibi bir çok aşama vardır. Matematiksel tümevarım belli nesnelere matematiksel olarak gözlenmesi ve bu ilişkilerin genellenmesidir. Tümevarımsal ve tümdengelimli akıl yürütme, iki geleneksel akıl yürütme türüdür (Cañadas & Castro, 2007). Tümevarımsal akıl yürütme bilimsel bir bakış açısından çok önemlidir çünkü bilimsel bilgi edinmemize izin vermektedir (Pólya, 1967; Cañadas & Castro, 2007)

Tümevarımsal akıl yürütme bir düşünme sürecidir. Bu nedenle belli aşamaları içermektedir. Bu aşamalar özel durumlardan genel durumlara doğru izlenen yolu açığa çıkarmaktadır. Bu çalışmada da tümevarımsal akıl yürütme gözlem yapma, bu gözlemleri ilişkilendirebilme, tahminde bulunma, bulunulan tahminin doğruluğunu kontrol etme, kuralı genelleme ve son olarak da genellenmenin kontrolünü yapma işlemlerinin bulunduğu bir süreç olarak ele alınmıştır. Bu aşamalar göz önüne alındığında tümevarımsal akıl yürütmenin problem çözme, özelleştirme, matematiksel düşünme, genelleme, ispat vb gibi becerilerle de ilişkili olduğunu görülmektedir. Burns (2000) ifade ettiği gibi verilen bir örüntüyü tanıma, devam ettirme ve yeni bir örüntü oluşturma gibi beceriler matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini kavramada çok önemli ve geliştirilmesi gerekli yeteneklerdir.



Pólya (1967), tümevarımsal akıl yürütme sürecinin belirli durumların gözlemlenmesi, bu durumlara dayalı dayalı varsayımda bulunma, genelleştirme ve varsayımı doğrulama olmak üzere dört aşama ifade etmektedir. Burton (1984) ise uzmanlaşma (yani, belirli vakaları araştıran faaliyetlerde bulunma), varsayım (yani, belirli durumlar arasındaki temel ilişkileri araştırma, ifade etme ve doğrulayıcı faaliyetlerde bulunmak) genelleştirme (yani, genelleme ifadeleri oluşturma) gerekçelendirme (yani kendini ve başkalarını kalıp genellemesinin sağlamlığı konusunda ikna etme) aşamalarından oluştuğunu ifade etmektedir. Cañadas ve Castro (2007, 2009) ise belirli durumların gözlenmesi, durumlardaki ilgili bilgileri organize etme, modellerin araştırılması ve tahmin edilmesi, varsayım formülasyonu, varsayım doğrulama, varsayımın genellenmesi ve genellemelerin gerekçelendirmesi olarak kavramsallaştırmıştır. Burton (1984), Cañadas ve Castro'nun (2007, 2009) çalışmalarına dayalı olarak da Magiera (2012) özelleştirme, varsayımda bulunma, genelleme ve doğrulama, aşamalarını temele almıştır. Bu aşamalar matematiksel düşünme alt bileşenleri olarak da verilmektedir.

Bu çalışmada altı aşamalı tümevarımsal akıl yürütme süreci temele alınmıştır. Bu aşamalardan ilki gözlemlenme aşamasıdır. *Gözlemlenme aşaması*, problemdeki özel durumlarla ilk deneyimlerin yaşandığı bir başlangıç noktasıdır. İkinci aşama olan *gözlemlerin organizesi aşaması*, gözlemlenen özel durumların düzenlenmesi ve sistematik bir hale getirilmesi için seçilen stratejileri içermektedir (Allen, 2001; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Üçüncü aşama *yordama aşaması*, Cañadas ve Castro'nun (2007) ve Cañadas v.d.'nin (2008) "araştırma" ve "örüntüyü tahmin etme" aşamalarını birleştirilerek, Navruz'un (2012) çalışmasında yordama olarak tek aşamada toplanmıştır. Araştırma ve örüntüyü tahmin etme, örüntünün bir sonraki veya yakın bir terimini tahmin etmek anlamına gelirken (Cañadas v.d., 2008) yordama, örüntünün uzaktaki herhangi bir terimi için çıkarımda bulunmak veya örüntünün bütün terimlerine uygulanabilen basit bir formül üretmek anlamına gelmektedir. Bu çalışmada da bu iki aşama birleştirilerek 'yordama' aşaması olarak alınmıştır. Bir önceki aşama olan gözlemlerin organizesinde bulunan anlamlı ilişki burada daha pratik ve kısa bir şekilde ifade edilebilmelidir. gözlemlerin organizesi aşamasında sistematikleştirilen gözlemler bu aşamada pratikleştirilmektedir. Dördüncü aşama *yordamanın testidir*. Bu aşamada genel durumlar yerine sadece yeni özel durumlar için kontroller yapılır. Yeni özel durumlar için gerçekleştirilebildiği gibi var olan özel durumlar için de gerçekleştirilebilmektedir. Bunun sebebi de verilen özel durumlar birden çok olabilmektedir ve hepsi, her zaman yordama için kullanılmayabilir. Dolayısıyla yordamanın testinde de kullanılmasında sakınca olmamaktadır. Yeni özel durumlar için test ederken çizmek ya da tek tek saymak gibi yöntemlerle sonucun kontrol edilmesi gerekmektedir. Var olan özel durumlar için test etmek daha kolaydır. Beşinci aşama *genellemedir*. Bu aşama uygun bir yordamadan özel durumlara bağlı olmayan, genel bir kurala ulaşmak anlamına gelmektedir Navruz'un (2012) çalışmasında da cebirsel veya sözel formüller yazma, örüntünün n. adımı hakkında fikir üretme ve örüntünün genel terimine ulaşmaya çalışma şeklinde ele alınmıştır. Bu çalışmada da aynı şekilde alınmıştır. Altıncı ve son aşama ise *genellenmenin testidir*. Bu aşama, matematiksel ispatlarla genellenmenin doğru olduğuna ikna etmektir. Bu çalışmada genellenmenin testi aşaması, bulunan formülün soruda verilen değerler için denenecek test edilmesi veya formülden elde edilen herhangi bir sonucun çizme gibi başka bir yöntem kullanarak test edilmesi şeklinde ele alınmıştır.

Cañadas ve Castro'nun (2007) ifade ettiği gibi bu aşamalar, belirli durumlardan genel duruma kadar tümevarımsal akıl yürütme sürecinin ötesindeki seviyeler olarak düşünülebilir ve bu seviyelerin her zaman mutlaka meydana gelmesi beklenmez. Bu bağlamda bu çalışmanın problem cümlesi Ortaöğretim öğrencilerinin kibrit çöpü sorusunda sergiledikleri tümevarımsal akıl yürütme aşamalarında davranışlar nelerdir? Sınıflara göre bu davranışlar farklılık göstermekte midir? şeklindedir. Çalışmalarının bulguları doğrultusunda da hangi aşamaların gerçekleşmediğine yönelik çıkarımlarda bulunmak amaçlanmıştır. Tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili fazla çalışma bulunmamaktadır. Araştırmalar (Pólya, 1967; Reid, 2002; Cañadas & Castro, 2007; Cañadas vd., 2008, Cañadas vd., 2009; Navruz, 2012, Magiera, 2012) tümevarımsal akıl yürütme sürecinin incelenmesi, açığa çıkarılması gerekliliğini ortaya koymaktadır.

## 2. YÖNTEM

### 2.1. Araştırma Modeli

Tümevarımsal akıl yürütme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması tercih edilmiştir (Yıldırım ve Simsek, 2006). Nitel yöntemler metin ve imgesel verilere dayanır ve veri analizinde özgün adımlara sahiptir. Durum çalışması tercih edilmesinin nedeni durum çalışmasının tüm durumlar için geçerli olmaması yalnızca belirlenen durum için genellemeler yapılmasına uygun olmasıdır. Bu çalışmada her bir tümevarımsal akıl yürütme aşaması ve her bir sınıf düzeyi bir durum olarak ele

alınmıştır. Dolayısıyla her bir aşamaya göre sınıflar arası inceleme yapılmıştır. Sınıflara göre aşamaların farklılık gösterip göstermediğinin anlaşılması, süreç içindeki sergilenen davranışlarının incelenmesi ve analiz edilmesi bakımından durum çalışması yöntemi bu araştırmanın doğası ile uyusmaktadır.

## 2.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları orta Anadolu’da bir Anadolu Lisesinde öğrenimlerine devam eden 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Araştırmacının çalıştığı okul olması sebebiyle katılımcılar kolay ulaşılabilir örneklem yöntemi ile seçilmiştir. Çalışmaya katılan her bir öğrenciye bir numara verilmiştir.

Tablo1. Sınıflara göre katılımcı numaraları

Sınıf	Katılımcı numaraları
9. sınıf	1-37
10. sınıf	38-91
11. sınıf	92-152
12. sınıf	153-188
Toplam	188

Tablo1’den görüldüğü gibi 1-37 arasındaki öğrenciler 9. sınıftan 38 ile 91 arasındaki öğrenciler 10. sınıftan 92 ile 152 arasındaki öğrenciler 11. sınıftan ve 153 ile 188 arasındaki öğrenciler 12. sınıftan olmak üzere toplam 188 öğrenci katılmıştır.

## 2.3. Veri Toplama Aracı

Çalışmada kullanılan kibrit çöpü sorusu aşağıda verilmiştir. Bu soru iki aşamalıdır.

Aşağıdaki şekil her bir kenarı bir kibrit çöpü uzunluğundaki bitişik karelerden oluşmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi 1 kare için 4 kibrit çöpü, 2 kare için 7 kibrit çöpü, 3 kare için 10 kibrit çöpü gerekmektedir.



- Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?
- Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

Soruda 1., 2. ve 3. özel durumları görsel ile birlikte verilmiştir. Öğrencilere soruyu çözerken nasıl çözdüklerine ve çözüm sürecine dair veri elde edileceğine yönelik açıklama yapılmıştır. Bu sayede düşündükleri çözüm yöntemini detaylı açıklamaları istenmiştir. Veriler yazılı olarak toplanmıştır. Öğrencilere çözüm için ve yazabilecekleri, çizim yapabilecekleri yeterli alan verilmiştir. Veriler toplanırken zaman kısıtlaması yapılmamıştır. Veri toplama aracı gönüllü olan öğrencilere uygulanmıştır. Öğrenciler çözmeleri için zorlanmamıştır.

## 2.4. Verilerin Analizi

Toplanan verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra verilen cevaplar 9, 10, 11 ve 12. sınıflara göre gruplandırılmıştır. Her kağıda 1’den başlayarak bir numara verilmiştir. Kibrit çöpü sorusunun analizi için önceden bir kodlama örneği oluşturulmuştur. Bu kodlama tümevarımsal akıl yürütme sürecinin her bir aşaması için başarılı ve başarısız olası durumlar düşünülmüştür. Öğrenci kağıtları gözden geçirilerek varsa yeni olası durumlar eklenmiştir. Ayrıca hiç kullanılmayan durumlar çıkarılmıştır. Bu durumlara da farklı farklı kodlar verilmiştir. Bu sayede her öğrencinin kağıdı tek tek incelenerek hangi aşamada hangi durumu kullandığı kod numaraları yardımıyla yazılmıştır. Daha sonra bu veriler yardımıyla hangi durumun kaç öğrenci tarafından kullanıldığı hesaplanmış ve frekans-yüzde tablosu oluşturulmuştur. Bu sayede 9, 10, 11 ve 12 sınıfın profili çıkarılmış karşılaştırılmalar yapılmıştır.

## 2.5. Kibrit Çöpü Sorusunun Kodlama Örneği

Bu soruda öğrencinin bu özel durumlar için gözlem yapması, bir varsayımda bulunması ve genelleme yapması gerekmektedir. Yani sorunun a seçeneğinde yakın bir özel durum olan 14 kare için kullanılan kibrit çöpü sayısını ifade etmesi beklenirken b seçeneğinde ise herhangi bir durum için genelleme yapması, bir ilişkiyi bulması beklenmektedir. İlk özel durumda 1 kare verilmiştir ve 4 kibrit çöpü kullanılmıştır. 2. özel

durumda ise ilk karenin yanına 3 kibrit çöpü eklenerek 2 kare elde edilmiş ve 3 kibrit çöpü artmıştır. 3. durumda ise yine 3 kibrit çöpü eklenerek 3 kare elde edilmiştir.

Tablo 2. Kibrit çöpü sorusu için tümevarımsal akıl yürütme aşamalarındaki beklenen adımlar

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
Verilen özel durumlar için	4=1+3	=1+3	=1+1(3)	
	7=4+3	=1+3+3	=1+2(3)	
	10=7+3	=1+3+3+3	=1+3(3)	3n+1
Verilmeyen özel durumlar için	13=10+3	=1+3+3+3+3	=1+4(3)	4n-(n-1)
	16=13+3	=1+3+3+3+3+3	=1+5(3)	(n-1)3+4
			=1+14(3)	

Gözleme aşamasında öğrencinin bu özel durumları gözlemlemesi beklenmektedir. Bu gözlemlemeyi yaparken öğrenci ritmik artışı baz alarak yapabileceği gibi şekil üzerinde yazarak da yapabilir. Bu aşamada öğrenciler soruda verilen görseldeki gibi ilk 3 durumu alabileceği gibi daha çok durumda alabilir. Bu ise öğrencinin aldığı özel durum sayısını göstermektedir. Gözlemlerin organizesi aşamasında da özel durumlar arasında bir ilişki kurması beklenmektedir. Bu ilişkiyi tablo ile gösterebileceği gibi alt alta da yazabilir. Şekil çizmeden yararlanılabileceği gibi tamamen şekilden bağımsız olarak sayılar arasındaki ilişki yardımıyla da yapılabilir. Yazarken işlemleri yapmadan açık açık yazılması gözlemlerin organize edilmesini kolaylaştırmaktadır. Öğrencinin 1. soru için karelerdeki her bir artışın kibrit çöpü sayısında 3 artışa karşılık geldiğini görmesi beklenmektedir. Yordama aşamasında ise, öğrencinin ilişkiyi görmüş olması ya da yakın bir durum için ifade etmiş olması beklenmektedir. Sonuca ulaşmak yeterli değildir, sonuca bir tahminle ya da varsayımla daha az işlemle ulaşmak beklenmektedir. 1. soru için gözlemlerin organizesinde üçer artış olduğunu bulan öğrenci bu aşamada bir varsayımla işlemleri kısaltarak sonuca ulaşması beklenmektedir. 14 kare için kullanılan kibrit çöpü sayısı  $1 + 14 \cdot 3 = 43$  formülüyle yordanmıştır. Bu aşamada henüz harfli ifadeye geçilmemiştir. Genelleme aşamasında da bahsedileceği gibi harfli ifadeye geçildiğinde bu yordama değil genelleme olacaktır. Yordamanın testi aşamasında ise, öğrencinin bulduğu ilişkiyi özel durumlarda sağlanıp sağlanmadığını görmeye çalışması beklenmektedir. Verilen özel durum ile kontrol edilebildiği gibi verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Yani yordamada 14 yerine verilen özel durumlardan 2 yerleştirilip ve yine soruda verilen 7 sayısını verilebilir. Bu şekilde yordamanın doğruluğu test edilmiştir. Çizerek de test edilebilir. 14 sayısı için 14 bitişik kare çizilerek kullanılan kibrit çöpü sayısı sayılarak kontrol edilebilir. Ya da verilmeyen başka bir özel durum için çizilerek kontrol edilebilir. Genelleme aşamasında ise, yordama aşamasında bulunan ilişkiyi ifade edecek harfli değişken içeren doğru bir formül bulmaları beklenmektedir. Tablo 2'de verildiği şekilde bu formülü  $3n + 1$  olarak bulabilecekleri gibi  $4n - (n - 1)$  ya da  $(n - 1)3 + 4$  şeklinde de ifade edebilirler. Genellenmenin testi aşamasında da yordamanın testi aşamasındaki gibi kontrol edilmesi beklenmektedir. Yine benzer şekilde verilen özel bir durum ile kontrol edilebilir ya da verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. özel durumlardan bir, iki ve üç ile test edilebilir. Ayrıca verilmeyen özel durumlar için de test edilebilir. Ancak burada dört kare için kullanılan kibrit çöpü sayısının on üç olduğunu farklı bir yöntemle de elde etmesi beklenmektedir ki test etme işlemi gerçekçi olsun. Bitişik dört kare çizilerek kullanılan kibrit çöpleri sayılabilir.

### 3. BULGULAR

Kibrit çöpü sorusu iki aşamalıdır. İlk seçenekte yakın bir duruma ikinci seçenekte ise herhangi bir duruma genelleme yapmaları istenmektedir. Kibrit çöpü sorusu için Tümevarımsal akıl yürütmenin aşamalarına ilişkin bulgular Tablo 3'de özetlenmiştir.

Tablo 3. Kıbrıt çöpü sorusuna ait analiz tablosu

TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	f (%)				
			9.sınıf (37)	10.sınıf (54)	11.sınıf (61)	12.sınıf (36)	Toplam (188)
1.GÖZLEMLEME	Başarılı	1.1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)	15 (%41)	9 (%17)	8 (%13)	4 (%11)	36 (%19)
		1.2. Ritmik artışa baz alarak (cebirselsel)	10 (%27)	27 (%50)	30 (%49)	17 (%47)	84 (%45)
		1.3. hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirselsel)	0 (%0)	2 (%4)	3 (%5)	4 (%11)	9 (%5)
	Başarısız	1.4 boş	12 (%32)	16 (%30)	20 (%33)	11 (%31)	59 (%31)
2.GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	Başarılı	2.1. sonraki bir adıma ilerletebilme	27 (%73)	46 (%85)	57 (%93)	28 (%78)	158 (%84)
	Başarısız	2.2. sonraki bir adıma ilerletememe	10 (%27)	8 (%15)	4 (%7)	8 (%22)	30 (%16)
3.YORDAMA	Başarılı	3.1. 1 + 14.3	28 (%76)	50 (%93)	57 (%93)	34 (%94)	169 (%90)
	Başarısız	3.2. verilmeyen özel durumu kestiremememe	9 (%24)	4 (%7)	4 (%7)	2 (%6)	19 (%10)
4.YORDAMANIN TESTİ	Başarılı	4.1. kontrol	5 (%14)	2 (%4)	18 (%30)	4 (%11)	29 (%15)
	Başarısız	4.2. boş	32 (%86)	52 (%96)	43 (%70)	32 (%89)	159 (%85)
5.GENELLEME	Başarılı	5.1.(3n + 1) formülüne genelleme	10 (%27)	26 (%48)	52 (%85)	0 (%0)	88 (%47)
		5.2.(4n) – (n – 1) formülüne genelleme	2 (%5)	5 (%9)	2 (%3)	22 (%61)	31 (%16)
		5.3.(n – 1)3 + 4 formülüne genelleme	1 (%3)	7 (%13)	0 (%0)	3 (%8)	11 (%6)
	Başarısız	5.4. Yanlış formüle genelleme	11 (%30)	8 (%15)	3 (%5)	1 (%3)	23 (%12)
		5.5. Boş	13 (%35)	8 (%15)	4 (%7)	10 (%28)	35 (%19)
6.GENELLEMEİNİN TESTİ	Başarılı	6.1. Doğru kontrol	3 (%8)	11 (%20)	18 (%30)	2 (%6)	34 (%18)
	Başarısız	6.2. boş	34 (%92)	43 (%80)	43 (%70)	34 (%94)	154 (%82)

\*Tablo3'de yüzdeler alınırken yapılan yuvarlamadan ötürü bir aşamadaki toplam durum %101,%100 ve %99 gelebilmektedir. Bu durum yuvarlamadan kaynaklanmaktadır ve göz ardı edilmiştir.

Tablo 3'den görüldüğü gibi gözleme aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %31'i "başarısız" kategorisi altına alınmıştır. Başarısız kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. Sınıflar %33 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %30 ile 10. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9 da %32 iken 10. Sınıfta biraz düşerek %30 ve 11. Sınıfta yükselerek %33 olmuş iken 12. sınıfta tekrar düşerek %31 olmuştur.

Gözlemlerin organizesi aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %16'sı "başarısız" kategorisi altına alınmıştır. Başarısız kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %27 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %7 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %27 iken 10. sınıfta biraz düşerek %15 ve 11. sınıfta yine biraz daha düşerek %7 olmuş iken 12. Sınıfta bir anda %22'ye doğru artmıştır.

Yordama aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %10'u "başarısız" kategorisi altına alınmıştır. Başarısız kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %24 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %6 ile 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %24 iken 10 ve 11. sınıfta biraz düşerek %7 olmuştur ve 12. Sınıfta yine biraz daha düşerek %6 olmuştur. İkinci aşamadakinin aksine 12. sınıfta bu aşamada başarısız cevaplarda yükselme olmamıştır. Aksine azalma olmuştur.

Yordamanın Testi aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %85'i "başarısız" kategorisi altına alınmıştır. Bu büyük bir orandır. Başarısız kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 10. sınıflar %96 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %70 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %86 iken 10. sınıfta biraz yükselerek %96 olmuş ve 11. sınıfta bayağı düşerek %70 olmuş iken 12. sınıfta bir anda %89'a artmıştır.

Genelleme aşamasında başarısız kategorisi altında iki alt kategori oluşturulmuştur. Bunlardan birincisi "Yanlış formüle genelleme" diğeri ise "boş" alt kategorileridir. Her bir alt kategorideki cevaplar

incelendiğinde Çalışmaya katılan öğrencilerin %12'si “Yanlış formüle genelleme” ve %19'u “boş” kategorisi altında değerlendirilmiştir.

“*Yanlış formüle genelleme*” alt kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. Sınıflar %30 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %3 ile 12. sınıftadır Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %30 iken 10. sınıfta biraz düşerek %15 ve 11. sınıfta yine biraz daha düşerek %5 olmuş iken 12. Sınıfta daha da düşerek %3 olmuştur. “*Boş*” alt kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %35 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %7 ile 11. sınıftadır Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %35 iken 10. sınıfta biraz düşerek %15 ve 11. sınıfta yine biraz daha düşerek %7 olmuş iken 12. sınıfta bir anda artarak %28 olmuştur.

*Genellemenin Testi aşamasında* çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %82'i “başarısız” kategorisi altına alınmıştır. Başarısız kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 12. Sınıflar %94 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %70 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %92 iken 10. sınıfta biraz düşerek %80 ve 11. sınıfta yine biraz daha düşerek %70 olmuş iken 12. sınıfta bir anda %94'e doğru artmıştır.

Tablo 4. Kibrit çöpü sorusunda “başarısız” kategorisindeki cevapların sınıflara ve aşamalara göre dağılımı

	TÜMEVARIMSAL AKIL YÜRÜTME AŞAMALARI				
	f (%)				
	9.sınıf (37)	10.sınıf (54)	11.sınıf (61)	12.sınıf (36)	Toplam (188)
GÖZLEMLEME	12 (%32)	16 (%30)	20 (%33)	11 (%31)	59 (%31)
GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	10 (%27)	8 (%15)	4 (%7)	8 (%22)	30 (%16)
YORDAMA	9 (%24)	4 (%7)	4 (%7)	2 (%6)	19 (%10)
YORDAMANIN TESTİ	32 (%86)	52 (%96)	43 (%70)	32 (%89)	159 (%85)
GENELLEME	11 (%30)	8 (%15)	3 (%5)	1 (%3)	23 (%12)
	13 (%35)	8 (%15)	4 (%7)	10 (%28)	35 (%19)
GENELLEMENİN TESTİ	34 (%92)	43 (%80)	43 (%70)	34 (%94)	154 (%82)

Genel olarak ifade etmek gerekirse, Tablo 4'dan görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğrenciler en çok yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarında başarısız kategorileri altında cevap vermişlerdir. Kibrit çöpü sorusunda başarılı olarak kabul edilen cevaplar her bir aşamaya göre detaylıca açıklanmıştır.

#### ✓ Gözlemlenme Aşaması

“Gözlemlenme” aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Başarılı” kategorisi;

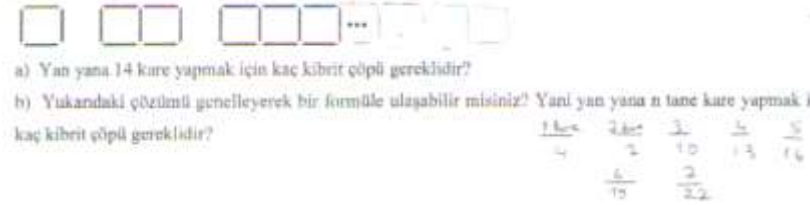
“1.1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)”,

”1.2. Ritmik artışı baz alarak (cebirsal)” ve

“1.3. Şeklin üstünde sayarak ve ritmik artışı baz alarak (şekilsel ve cebirsal)

olmak üzere üç alt başlıkta toplanmıştır. “Başarısız” kategorisi de "1.4. boş" olmak üzere tek alt kategoridir. Tablo 3'den görüldüğü gibi tümevarımsal akıl yürütmenin gözlemlenme aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu yani % 45'i “Ritmik artışı baz alarak (cebirsal)” kategorisinde cevap vermişlerdir. 9. Sınıflar en çok şeklin üstüne sayarak cevap verirken 10,11 ve 12. Sınıflar en çok ritmik artışı baz alarak cevap vermişlerdir. Diğer bir ifade ile şekilsel düşünmenin alt sınıflarda daha çok tercih edildiği ve üst sınıflara doğru azaldığı Tablo3'den görülmektedir. Soruyu somutlaştırmak için şekil çizdikleri düşünülürse üst sınıfların alt sınıflara göre daha soyut düşünebildiği ve şekle daha az ihtiyaç duydukları söylenebilir. Ayrıca ritmik artışı baz alarak düşünmeyi 9. sınıf öğrencileri en az kullanırken 10. sınıf öğrencileri en yüksek seviyede; 11 ve 12. sınıf öğrencileri ise ortalamanın üstünde tercih etmiştir. En az kullanılan gözlemlenme işlemi Hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsal) olarak kodlanmıştır ve 9. sınıflar hiç kullanmamışlardır. Diğer taraftan sınıfa göre ise çalışmaya katılan 9. sınıf öğrencileri en fazla (%41) “Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)” kategorisinde cevap vermişlerdir. Fakat çalışmaya katılan 10, 11, ve 12. sınıf öğrencileri en fazla “Ritmik artışı baz alarak (cebirsal)” kategorisinde cevap vermişlerdir. 10. sınıf öğrencilerinde bu oran %50 iken 11. sınıf öğrencilerinde %49, 12. sınıf öğrencilerin de %47'dir. Bu bulgu 9. sınıfta şeklin üstüne sayarak gözlem yaparken daha ilerideki sınıflarda ritmik artışın baz alınarak yapıldığı şeklinde yorumlanabilir.

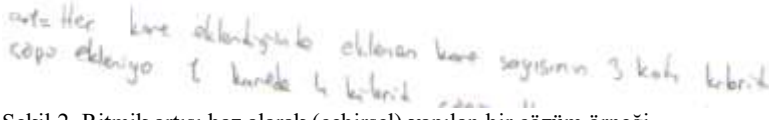
"1.1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)" kategorisine ait bir örnek Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategoride cevap veren öğrenciler, verilen şekildeki karelerdeki kibrit çöplerini saymışlar ve Şekil 1 deki gibi birinci adımda bir karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 4, ikinci adımda bulunan iki karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 7 ve üçüncü adımda üç karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 10 olduğu şeklinde devam etmişlerdir. Tablo 5'den görüldüğü gibi 9. sınıflardan 15 (%41) öğrenci, 10. sınıflardan 9 (%17) öğrenci, 11. sınıflardan 8 (%13) öğrenci, 12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 36 (%19) öğrenci gözlemlenmiştir. Bu şekilde şekilsel düşünmenin alt sınıflarda daha çok tercih edildiği ve üst sınıflara doğru azaldığı Tablo 2'den görülmektedir. Soruyu somutlaştırmak için şekil çizdikleri düşünülürse üst sınıfların alt sınıflara göre daha soyut düşünebildiği ve şekle daha az ihtiyaç duydukları söylenebilir.

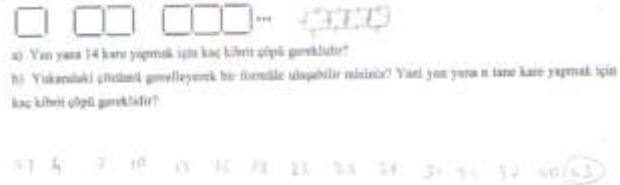
1.2. "Ritmik artışı baz alarak (cebirsal)" kategorisine ait bir örnek Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Ritmik artışı baz alarak (cebirsal) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategorideki çözümlerde öğrenciler, özel durumlar arasındaki artışın üçer ritmik olduğuna odaklanmışlardır. Bu cevaplar sözel (şekil 9) veya cebirsal ifade edilmiştir. Tablo 5'den görüldüğü gibi 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 27 (%50) öğrenci, 11. sınıflardan 30 (%49) öğrenci, 12. sınıflardan 17 (%47) öğrenci ve toplamda da 84 (%45) öğrenci gözlemlenmiştir. Bu şekilde düşünmeyi 9. sınıf öğrencileri en az kullanırken 10. sınıf öğrencileri en yüksek seviyede; 11 ve 12. sınıf öğrencileri ise ortalamanın üstünde tercih etmiştir.

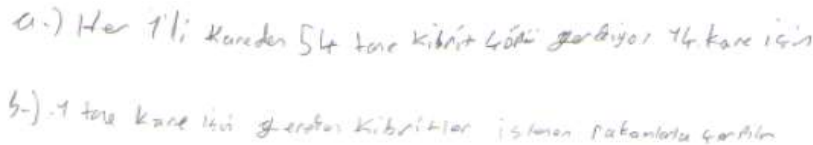
1.3. "Hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsal)" kategorisine ait bir örnek Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3. Hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsal) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategoride cevap veren öğrenciler diğer iki kategoriye birlikte kullanmışlardır. Hem şekilden hem de artış miktarından faydalanmışlardır. Şekil 3'de görüldüğü gibi bir karede kullanılan 4 kibrit çöpü, iki karede kullanılan 7 kibrit çöpü ve üç karede kullanılan 10 kibrit çöpü olduğunu sayarak bulmuş hatta bir sonraki adımı bulabilmek için şekil çizmişlerdir. 4,7,10,13 olan kibrit çöpleri sayılarındaki üçer ritmik artışı fark etmiş ve bu artışa odaklanmışlardır ve bu kullanılarak çözüme devam edilmiştir. Tablo 2 ye göre 9. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 3 (%5) öğrenci, 12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 9 (%5) öğrenci gözlemlenmiştir. En az kullanılan gözlemlenme işlemidir. 9. sınıflar hiç kullanmamışlardır.

1.4. "Boş" kategorisine ait bir örnek Şekil 4' de verilmiştir.



Şekil 4. Boş bırakılan bir çözüm örneği

Gözleme aşamasında yanlış anlaşılabilir ve boş bırakılan sorular başarısız sayılmaktadır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil 4' de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak gözleme aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 3' e göre 9. sınıflardan 12 (%32) öğrenci, 10. sınıflardan 16 (%30) öğrenci, 11. sınıflardan 20 (%33) öğrenci, 12. sınıflardan 11 (%31) öğrenci ve toplamda da 59 (%31) öğrenci boş bırakmıştır. 1 kare için 4 kibrit çöpü kullanılırsa 14 kare için  $14 \cdot 4 = 56$  kibrit çöpü kullanılacağını düşünenler olmuştur. 1'e 4, 2 ye 7, 3 e 10 ise 14' e kaç olur diye doğru orantıyı deneyenler olmuştur. Bu aşamayı boş bıraktıktan sonra doğru genellemeyi yapanlar da vardır. Bu öğrencilerin gözleme aşamasında kalem kullanmadıkları için gözlemede nasıl bir yöntem izledikleri bilinmemektedir. 9'da 10'a düşüş 10'dan 11'e artış 11'den 12'ye yeniden bir düşüş vardır. İlk sırada 11'ler varken son sıra 10. sınıflardır.

### ✓ Gözlemlerin Organizesi Aşaması

Gözlemlerin organizesi aşamasında ise çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu (%84) sonraki bir adıma ilerletebilmişlerdir. Bunu yapamayan öğrencilerin çoğunluğunun (%27) 9. Sınıfta olduğu görülmektedir. Ayrıca bu oran Tablo 3'e göre 9. sınıfta en fazla iken 11. sınıfa doğru azalmakta iken 12. sınıfta yeniden arttığı da görülmektedir. Gözlemlerin organizesi aşamasında verilmeyen bir adıma ilerletebilenler başarılı ilerletemeyenler başarısız sayılmaktadır.

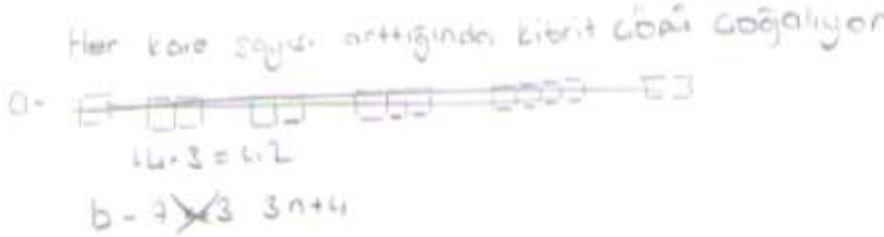
"2.1. sonraki bir adıma ilerletebilme" kategorisine ait bir örnek Şekil 5' de verilmiştir.



Şekil 5. sonraki bir adıma ilerletebilen başarılı bir çözüm örneği

Gözleme aşamasında 1. adım 1 kare 4 kibrit çöpü  $4 + (1 - 1) \cdot 3$  ve 2. adım 2 kare 7 kibrit çöpü  $4 + (2 - 1) \cdot 3$  olarak gözlemlenmiş ve gözlemlerin organizesi aşamasında 14 kare için  $4 + (14 - 1) \cdot 3 = 43$  şeklinde verilmeyen bir adıma ilerlenmiş olduğu görülmektedir. Tablo5'e göre 9. sınıflardan 27 (%73) öğrenci, 10. sınıflardan 46 (%85) öğrenci, 11. sınıflardan 57 (%93) öğrenci, 12. sınıflardan 28 (%78) öğrenci ve toplamda da 158 (%84) öğrenci gözleme aşamasında bu işlemi kullanmıştır. 9, 10, 11. sınıflarda artış varken 12. sınıflar da düşüş gözlemlenmiştir.

"2.2. sonraki bir adıma ilerletememe" kategorisine ait bir örnek Şekil 6' da verilmiştir.



Şekil 6. sonraki adıma ilerletilemeyen başarısız bir çözüm örneği

Burada öğrenci gözleme aşamasında şekilsel gözleme yapmış ancak yaptığı bu çizimden memnun olamayarak üstünü karalamıştır. Bu aşamada 4,7,10 sayılarını bir sonraki adım olan 13'e da daha sonraki adımlara ilerletmesi beklenmiş ama bu örnekteki gibi ilerletemedikleri gözlemlenmiştir. Tablo 3'e göre 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 8 (%22) öğrenci ve toplamda da 30 (%16) öğrenci gözlemlerin organizesi aşamasında bir sonraki adıma ilerletememişlerdir. Üst sınıflara doğru azalma gözlemlenmiş ve 12. sınıflar yine bunu bozmuştur.

### ✓ Yordama Aşaması

14 kare için kullanılacak kibrit çöpü sayısını 43 bulanlar yordama aşamasında başarılı sayılmışlardır. Burada öğrencilerin sonraki adımı bulabilmeleri hatta biraz uzak adımı kestirebilmeleri beklenmiştir. Yordama aşamasında bazı öğrenciler sözel açıklamada bulunmuşlardır. Üçer artış olduğunu, istenen kare sayısının bir eksiğinin üç ile çarpılması gerektiğini yazmışlardır. Bazı öğrencilerde her kare için dörtle çarpılması gerektiğini sonra da ortak olan çöplerin yani kare sayısının bir eksiğinin çıkarılması gerektiğini görmüşlerdir. Bunları sözel olarak yazarak ifade etmişlerdir.



“3.1. 14 kare için gerekli kibrit çöpünü 14 bulma” kategorisine ait bir örnek Şekil 7’de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 1. \text{ adım} &\rightarrow (4-1) - (1-1) = 4 \text{ kibrit} \\
 2. \text{ adım} &\rightarrow (4-2) - (2-1) = 2 \text{ kibrit} \\
 3. \text{ adım} &\rightarrow (4-3) - (3-1) = 10 \text{ kibrit} \\
 14. \text{ adım} &\rightarrow (4-14) - (14-1) = 43 \text{ kibrit} \\
 &56 - 13
 \end{aligned}$$

Şekil7. 14 kare için kibrit çöpü sayısını 43 bulabilen başarılı bir çözüm örneği

Şekil 7’de verilen örnekte başarılı bir şekilde yordama yapılmıştır. Soruda verilen 3 adımı başarılı bir şekilde gözlemlemiş ve gözlemlediklerini cebirsel ifade ederek organize etmiş ve verilmeyen bir adım olan 14. adıma yordamıştır. Bu yordama test edilmemiş hemen genellenmiş ve yine bu genelleme test edilmemiştir. 1. sorunun a şıkkının cevabını 43 bulamayanlar yordama aşamasında başarısız sayılmışlardır. Yordama aşamasında başarılı olanlar gözlemlerin organizesi aşamasında da başarılı olmuşlardır. Çünkü gözlemlerin organizesinde verilmeyen herhangi bir adıma devam ettirebilmesi işlemi vardır. Yordamada da istenen bir adımı kestirebilme vardır. Yani yordayabilen biri zaten organize edebiliyordur. Yordamada başarısız olan biri organize işleminde başarılı olabilmektedir. Bir sonraki adıma ilerleyebilirken daha uzak bir adıma ilerleyemiyor olabilmektedir. Tablo3’e göre 9. sınıflardan 28 (%76) öğrenci, 10. sınıflardan 50 (%93) öğrenci, 11. sınıflardan 57 (%93) öğrenci, 12. sınıflardan 34 (%94) öğrenci ve toplamda da 169 (%90) öğrenci başarılı olmuştur. Üst sınıflara doğru azalmama gözlenmiştir. Ya artmış ya da sabit kalmıştır. 12. sınıflar %94 ile ilk sıradadır. 9. sınıflar ise % 76 ile sondadır.

“3.2. 14 kare için 43 e ulaşamama” kategorisine ait bir örnek Şekil 8’ de verilmiştir.



Şekil 8. 14 kare için 43 sayısına ulaşamayan başarısız bir çözüm örneği

14 kare için gerekli olan 43 kibrit çöpü sayısına ulaşamayan öğrenciler bu aşamada başarısız sayılmışlardır. Burada öğrenci bir sonraki adıma şekil çizerek ulaşmış ama bunu bir kaç adım sonrası için kestirememiştir. Doğru adımları yazmak için hep bir önceki adıma ihtiyaç duymuştur. Tablo 3’e göre 9. sınıflardan 9 (%24) öğrenci, 10. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 2 (%6) öğrenci ve toplamda da 19 (%10) öğrenci başarısız olmuştur. Üst sınıflara doğru artmamış, ya azalmış ya da sabit kalmıştır. En yüksek 9. sınıflarken en düşük 12. sınıflardır. 10 ve 11. sınıflar eşittir.

#### ✓ Yordamanın Testi Aşaması

Yordama aşamasında elde edilen 43 sayısını başka bir yoldan da elde ederek kontrol edenler bu aşamada başarılı sayılmışlardır. Yordama yapmadan formüle genelleyenler de olmuştur. Bu öğrenciler yordamanın da genellemenin de testini yapmışlardır. Yordamanın testi “4.1. Kontrol” ve “4.2. Boş” kategorilerinden oluşmaktadır.

"4.1. kontrol" kategorisine ait bir örnek Şekil 9' da verilmiştir.

Şekilde görüldüğü gibi 1 kare için 4 kibrit çöpü, 2 kare için 7 kibrit çöpü, 3 kare için 10 kibrit çöpü gerekmektedir.  $4n - (n - 1)$

1 kare 2 kare 3 kare ...

a) Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?  
 b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

$3n + 1$

1)  $3 \cdot 1 + 1 = 4$   
 2)  $3 \cdot 2 + 1 = 7$   
 3)  $3 \cdot 3 + 1 = 10$   
 4)  $3 \cdot 4 + 1 = 13$   
 ...  
 14)  $3 \cdot 14 + 1 = 43$

→ Bu soruyu deneyerek buldum - mesela yukarıdaki gibi den kullandığımda her bir kare oluşturma için "-1" kibrit çöpüne ihtiyacım. Bunun için genel bir formül oluşturduğum. Bunun için "3n+1" denedim ve soruyu ulaştım. Fakat...  
 → n kaç tane kare sayarsanız.

Şekil 9. Kontrol kategorisinde başarılı bir çözüm örneği

$4n - (n - 1)$  formülüyle yordamış 43'ü bulmuş ve sonra da  $3n + 1$  formülüyle yeniden 43 bularak yordamanın testini yapmıştır. Tablo 5'e göre 9. sınıflardan 5 (%14) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 18 (%30) öğrenci, 12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 29 (%15) öğrenci bu aşamada başarılı olmuştur. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. 9'dan 10'a azalmış 11'e artmış ve 12'ye tekrar azalmıştır. En başarılı sınıf 11'ler iken en az başarılı da 10. sınıflardır.

"4.2. boş" kategorisine ait bir örnek Şekil 10'de verilmiştir.

a) 1 kare 2 kare 3 kare 4 kare ... 14 kare

4 7 10 13 ...

genel formül  $3n + 1$  n → kare sayısı

14 kare için →  $3 \cdot 14 + 1 = 43$  kibrit çöpü gerekli

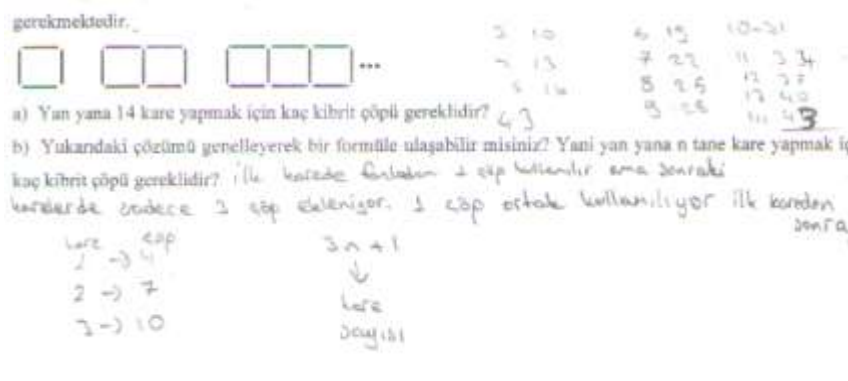
Şekil 10. boş kategorisine ait bir çözüm örneği

Öğrenci burada 4 adımdan sonra 14. adımın nasıl olabileceğini kestirmiş ama bunu test etmemiştir. İşlem hatası yapmış olsa ya da yordamayı yanlış yapmış olsa bunun farkına varılamayacaktır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil 11'de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak yordamanın testi aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 3'e göre 9. sınıflardan 32 (%86) öğrenci, 10. sınıflardan 52 (%96) öğrenci, 11. sınıflardan 43 (%70) öğrenci, 12. sınıflardan 32 (%89) öğrenci ve toplamda da 159 (%85) öğrenci bu aşamada başarısız olmuştur. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. En yüksek 10'lar en düşük 11'lerdir. 9'dan 10'a artmış 11'e azalmış ve 12'ye tekrar artmıştır.

✓ **Genelleme Aşaması**

Genelleme aşaması da başarılı ve başarısız olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Başarılılar da doğru formüle "5.1.  $3n + 1$  formülüne ekleyerek genelleme", "5.2.  $(4n) - (n - 1)$  formülüne çıkararak genelleme", "5.3.  $(n - 1)3 + 4$ 'e genelleme", "5.4. yanlış formüle genelleme" ve "5.5. boş" olmak üzere beş alt başlığa ayrılmaktadır. Her bir aşama örneklendirilerek açıklanmıştır.

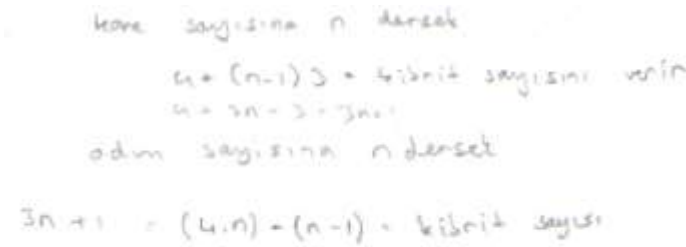
"5.1.  $3n + 1$  formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 11'de verilmiştir.



Şekil 11.  $(3n + 1)$  formülüne genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

"5.1.  $3n + 1$  formülüne ekleyerek genelleme" aşamasında kibrit çöplerindeki üçer artışa odaklananlar bu kategoride toplanmıştır. Bu öğrenciler bütünü genişletmişlerdir. Parçadan bütüne varmışlardır ve aradaki ekleme işlemini çarpma yardımıyla kısaltmışlardır. Hatta buradaki öğrenciler kareleri yan yatmış u gibi düşünmüşler son kareden sonra 1 kapak ekleyerek tüm kareleri tamamlamışlardır. Öğrenciler burada sayarken ilk kareyi 4, sonraki her kareyi 3 olarak almışlar ve bu şekilde genellemişlerdir. Tablo3'e göre 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 26 (%48) öğrenci, 11. sınıflardan 52 (%85) öğrenci, 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci ve toplamda da 88 (%47) öğrenci bu aşamayı kullanmıştır. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. En yüksek 11'ler en düşük 12'lerdir. 9'dan 11'e artmış 12'de ani bir düşüşle sıfırlanmıştır.

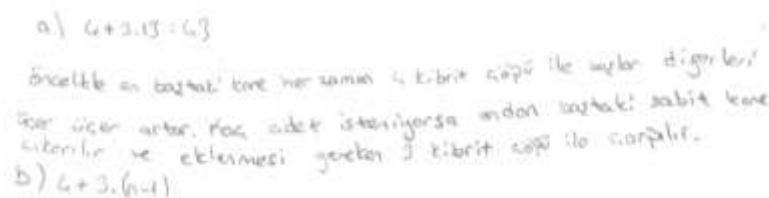
"5.2.  $(4n) - (n - 1)$  formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 12' de verilmiştir.



Şekil 12.  $(4n) - (n - 1)$  formülüne genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

"5.2.  $(4n) - (n - 1)$  formülüne çıkararak genelleme" aşamasında ise bütünden eksiltme yapılmıştır. Her kare için dört çöp kullanılmış aradaki ortak çöpleri çıkarılmıştır. Ortak çöp sayısının da kullanılan karenin bir eksiği ile eşit olduğu farkedilmiştir. Tablo3'e göre 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 5 (%9) öğrenci, 11. sınıflardan 2 (%3) öğrenci, 12. sınıflardan 22 (%61) öğrenci ve toplamda da 31 (%16) öğrenci bu aşamada genelleme yapmışlardır. En yüksek 12'ler en düşük 11'lerdir. 9'dan 11'e kadar azalmış 12'de ani bir şekilde artmıştır.

"5.3.  $(n - 1)3 + 4$  formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 13'de verilmiştir.



Şekil 13.  $(n - 1)3 + 4$  'e genellemeyi gösteren bir örnek

"5.3.  $(n - 1)3 + 4$  'e genelleme" 5.1. deki genelleme ile aynı gibi görünse de fark vardır. 5.1. de kare sayısı kadar 3'e 1 ekleniyorken burada ilk kare bütün yani 4 çöpten oluşturulmuş sonraki kareler için 3'er çöp eklenmiştir. Burada kullanılan karelerin 1 eksiği kadar 3 eklenmiştir. Tablo 3'e göre 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 7 (%13) öğrenci, 11. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 12. sınıflardan 3 (%8) öğrenci ve toplamda da 11 (%6) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Az tercih edilen bir genelleme olduğu bulgular arasındadır. 9. sınıftan 10. sınıfa artmış 11. sınıfta ani bir düşüşle sıfırlanmış ve 12' de yeniden artmıştır.

“5.4. yanlış formüle genelleme” kategorisine ait bir örnek Şekil 14' de verilmiştir.

$$2n + 2 \times 1 = 1 \text{ için } 2 \times 1 + 3 = 2 \text{ için}$$

Şekil 14. Yanlış formüle genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

5.4. yanlış formüle genelleme aşamasında yanlış formüle genelleyenler bulunmaktadır.  $2n + 2 \times 2^n + 3$  formüllerine genellenmiştir. Örnekteki öğrenci bu genellemelerin yanlış olduğunu farketmiştir. Tablo3'e göre 9. sınıflardan 11 (%30) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 3 (%5) öğrenci, 12. sınıflardan 1 (%3) öğrenci ve toplamda da 23 (%12) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Elde edilen bulgulardan biri üst sınıflara doğru bu aşamanın azaldığıdır. En çok yanlış genelleyenler 9. sınıf öğrencileriyken en az yanlış genelleyenler 12. sınıf öğrencileridir.

“5.5. boş” kategorisine ait bir örnek Şekil 15' de verilmiştir.

gerekmektedir.



a) Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir? (6) bu kibrit çöpüdür  
b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

Yan yana 2. dere. kare yapmak için 7 kibrit çöpü

doğru yanına ile yapın.

Şekil 15. Boş kategorisini gösteren bir çözüm örneği

Genelleme aşamasını boş bırakanlarda bu kategoride toplanmıştır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil15'da öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak genelleme aşamasını boş bırakmıştır. Tablo3'e göre 9. sınıflardan 13 (%35) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 10 (%28) öğrenci ve toplamda da 35 (%19) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Boş bırakanlar da 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru azalırken 12. sınıfta ani bir şekilde artmıştır. Bir diğer bulgu da 9. sınıflar en yüksek iken 12. sınıflar en düşüktür.

### ✓ Genellemenin Testi Aşaması

Genellemenin testi aşaması da başarılı başarısız olmak üzere iki alt başlığa ayrılmıştır. Başarılı olanları doğru kontrol yapanlar başarısızları da boş bırakanlar ve yanlış kontrol yapanlar oluşturmaktadır.

“6.1. doğru kontrol” kategorisine ait bir örnek Şekil 16' de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Kare sayısına } n \text{ derseniz} \\ 1 + (n-1) \cdot 3 = \text{kibrit sayısını verir} \\ 4 = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ \text{adım sayısına } n \text{ derseniz} \end{aligned}$$

$$3n + 1 = (4 \cdot n) - (n-1) = \text{kibrit sayısı}$$

$$1. \text{ adım } \rightarrow (4 \cdot 1) - (1-1) = 4 \text{ kibrit}$$

$$2. \text{ adım } \rightarrow (4 \cdot 2) - (2-1) = 7 \text{ kibrit}$$

$$3. \text{ adım } \rightarrow (4 \cdot 3) - (3-1) = 10 \text{ kibrit}$$

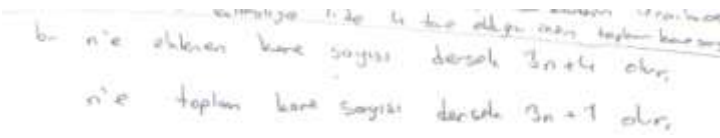
$$14. \text{ adım } \rightarrow (4 \cdot 14) - (14-1) = 43 \text{ kibrit}$$

$$56 = 13$$

Şekil 17. Doğru kontrol kategorisi için başarılı bir çözüm örneği

Bu örnekte de görüldüğü gibi bu aşamada doğru formüle genellenmiş ve verilen tüm değerler için sağlayıp sağlamadığını test edilmiştir. Tablo3'e göre 9. sınıflardan 3 (%8) öğrenci, 10. sınıflardan 11 (%20) öğrenci, 11. sınıflardan 18 (%30) öğrenci, 12. sınıflardan 2 (%6) öğrenci ve toplamda da 34 (%18) öğrenci tarafından bu şekilde test edilmiştir. Yine 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru artarken 12. sınıfta düşüş olmuştur. Bu aşamada 11'ler en yüksek başarıyı elde ederken 12'ler de en düşük başarıyı elde etmişlerdir.

“6.2. boş” kategorisine ait bir örnek Şekil 17’de verilmiştir.



Şekil 17. “Boş” kategorisine ait bir çözüm örneği

Test aşamasını boş bırakanlar bu kategoriye alınmışlardır. Genelleme yapılmış işlem orada bırakılmış ve devam edilmemiştir. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil18’de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak genellemenin testi aşamasını boş bırakmıştır. Tablo3’e göre 9. sınıflardan 34 (%92) öğrenci, 10. sınıflardan 43 (%80) öğrenci, 11. sınıflardan 43 (%70) öğrenci, 12. sınıflardan 34 (%94) öğrenci ve toplamda da 154 (%82) öğrenci genellemenin testinde başarısız olmuştur. 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru azalırken 12. sınıflarda bir yükselme görülmüştür.

### 3. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tümevarımlı akıl yürütme sürecini incelemek için bu çalışmada gözlemlene, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testinden oluşan altı aşamalı bir çatı temele alınarak inceleme yapılmıştır. Bu aşamalar somut görevlerden oluşmaktadır. Üstelik farklı problem durumlarında da kullanmanıza izin veren bir yapıya sahiptir. Bu çalışmada bağlam olarak kibrit çöpü sorusu kullanılmıştır. İlk seçenekte yakın bir duruma ikinci seçenekte ise herhangi bir duruma genelleme yapmaları istenmektedir. Elde edilen bulgular çalışmaya katılan öğrencilerin en çok yordamanın testi (%85) ve genellemenin testi aşamalarında (%82) başarısız olduklarını göstermiştir. Bu sonuç elbette ispat yapma becerisi ile de yakından ilişkilidir. İspat becerisi matematik yapabilmenin hatta matematiksel düşünmenin temel bileşenidir. Bu önemine rağmen öğrencilerin, öğretmen adaylarının ispat yaparken zorlandıklarını ifade eden birçok çalışma (Harel & Sowder, 1998; 2007; Jones, 2000; Almeida, 2001; Weber, 2001) mevcuttur. Bundan dolayı ispat becerisini geliştirmenin akıl yürütme becerisini de geliştireceği söylenebilir.

Tümevarımsal akıl yürütme sürecinin gözlemlene aşamasında çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu yani % 45’i “Ritmik artışı baz alarak (cebirselsel)” kategorisinde cevap vermişlerdir. 9. sınıflar en çok şeklin üstüne sayarak cevap verirken 10., 11. ve 12. sınıflar en çok ritmik artışı baz alarak cevap vermişlerdir. Diğer bir ifade ile görsel düşünmenin alt sınıflarda daha çok tercih edildiği ve üst sınıflara doğru azalmıştır. Aslında Hershkowitz, Arcavi ve Bruckheimer (2001) görselleştirmenin yüksek düzeyde akıl yürütmeden daha fazlası yani matematiğin hatta biçimsel sembolik ispatlarında merkezi olabileceğini ifade etmiştir. Bardelle (2009) ifade ettiği gibi öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebinin öğrencilerin öğretim hayatlarında görselleştirmeyle çok az karşılaşmalarıdır. Çalışmanın bulguları sınıf düzeyi ilerledikçe öğrencilerin görsel düşünme azaldığını göstermiştir. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri Rodd’a (2000) göre derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkündür. Gözlemlerin organizesi aşamasında ise çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu (%84) sonraki bir adıma ilerletebilmişlerdir. Bunu yapamayan öğrencilerin çoğunluğu (%27) 9. sınıftadır. Yordama aşamasında çalışmaya katılan öğrenciler üçer artış olduğunu, istenen kare sayısının bir eksiğinin üç ile çarpılması gerektiğini yazmışlardır. Bazı öğrencilerde her kare için dörtle çarpılması gerektiğini sonra da ortak olan çöplerin yani kare sayısının bir eksiğinin çıkarılması gerektiğini ifade etmişlerdir. Benzer olarak da Cañadas ve Castro (2007) yaptıkları çalışmada öğrencilerin zorlandığı iki ana nokta olduğunu bunlardan birisinin ilişkiyi- örüntüyü görmek ve diğeri ise bunu nasıl ifade edeceklerini bilmemeleri olmuştur. *Yordamanın testi aşamasında* ise yordama aşamasında elde edilen 43 sayısını başka bir yoldan da elde ederek kontrol edenler bu aşamada başarılı sayılmışlardır. Fakat yordama yapmadan genel kuralı yazanlarda olmuştur. Bunlar yordamanın testini de yapmamışlardır. Genellemenin testini yapmışlardır. Genelleme aşamasında  $3n + 1$  veya  $(4n) - (n - 1)$ ,  $3.(n - 1)3 + 4$ ’e gibi farklı şekilde ifade ettikleri genellemeler yaptıkları görülmüştür. Cañadas ve Castro (2007) ifade ettiği gibi öğrencilerin argümanlarını veya genellemelerini ifade etme şekillerinde bazı farklılıklar olabilir. Genellemenin birçok öğrenci için olduğu yaygın olarak da kabul edilmektedir (Stacey, 1989; Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2007). Bu nedenle genelleme yapmış olmaları önemli bir bulgudur.

### KAYNAKÇA

Allen, L. G. (2001) “Teaching Mathematical Induction: An Alternative Approach”. Mathematics Teacher, 94, 500-504.

- Almeida, D. (2001). Pupils' Proof Potential, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (1), 53-60, DOI: 10.1080/00207390119535.
- Bardelle, C. (2009). Visual Proofs: An Experiment. V. Durand-Guerrier et a (Dü.), *Annual meeting CERME6* (s. 251-260). Lyon: INRP.
- Burton, L. (1984). Mathematics thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.
- Burns, M. (2000). About Teaching Mathematics A-K 8 research. California: Math Solutions Publication.
- Moguel, L.E.S., Landa, E.A. & Cabañas-Sánchez, G. (2019) Characterization of Inductive Reasoning in Middle School Mathematics Teachers in a Generalization Task. *International Electronic Journal Of Mathematics Education* e-ISSN: 1306-3030. 2019, Vol. 14, No. 3, 563-581.
- Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Granada: Universidad de Granada. (Available at <http://cumbia.ath.cx/mcc.htm>)
- Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78. (Available at [ww.pna.es](http://ww.pna.es))
- Cañadas, M. C., J. Deulofeu, L. Figueiras, D. Reidand A. Yevdokimov. (2008). "The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice". *Journal of Teaching and Learning*, 5 (1), 55-72
- Canadas, M. C., & Castro, E. (2009). Using a Model to Describe Students' Inductive Reasoning in Problem Solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. 7(17): 261-278.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes. *Research On Collegiate Mathematics Education*, Vol. III. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on Learning and Teaching Proof, In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics (The 2nd Ed.)*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning-the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255-265
- Jones, K. (2000). The Student Experience of Mathematical Proof at University Level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53- 60.
- Magiera, M.T. (2012). K-8 Pre-service Teachers' Inductive Reasoning in Problem-solving Contexts. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*.
- Navruz, V. (2012) İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal düşünce süreçlerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
- Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris: DUNOD.
- Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 221-244.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2003). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık
- Zazkis, R. Liljedahl, P. & Chernoff E.J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education* DOI 10.1007/s11858-007-0065-9.